Revista Recursos de física
núm 3 ISSN: 1988-7930 PRIMAVERA DEL 2009 Societat Catalana de Física

El racó obscur

EL RACÓ OBSCUR

Xavier Jaén

La intenció d'aquesta secció és aclarir tots els temes relacionats amb (la didàctica de) la física, que, en el millor dels casos, provoquen polèmica i, en d'altres, irritacions infundades. En aquesta ocasió, tractem sobre l'aplicació de les simetries als problemes quotidians de física.

Per simetria!

Introducció

Hi ha moltes situacions en què els "arguments de simetria" simplifiquen molt un problema, fins al punt de poder resoldre'l. A l'estudiantat, aquests arguments a vegades li semblen innats o caiguts del cel, perquè no s'acostumen a explicar aquesta mena de conceptes. Tot plegat, queden amagats en frases de l'estil "Com es veu fàcilment...". "És evident que...". " Per simetria...!". Però, d'una manera o altra, la simetria s'utilitza a tots els nivells i en totes les ciències. La física és una de les ciències en què més útil pot ser aquest concepte.

Tampoc cal que ens esverem excessivament. Aquesta no és una situació local. Passa al nostre país, però també a d'altres països i en tots els nivells..

La simetria és un concepte que, a nivell elemental, sembla tan evident que no s'en diu res. Hom diria que més aviat se'n fuig! A la vegada, sabem que és un concepte molt utilitzat en l'àmbit de la física teòrica. Més d'una partícula (d'entrada tota l'antimatèria) s'ha descobert per una necessitat de satisfer certes simetries. Algun premi Nobel es dona per haver investigat els trencamenmts de simetria. Tot això ens queda molt lluny... fins al punt de crear un rebuig certament infundat.

Si volem que els estudiants utilitzin bé els arguments de simetria, els haurem d'explicar d'una manera o altra. Són tan senzills, aquests arguments? Fem-ne quatre pinzellades per desencallar el tema.

Què és simetria?

Amb un objecte S i una tranformació del tipus que sigui T, diem que T és una tranformació de simetria de S o que S té la simetria T, si S queda inalterat en fer T:

$$T(S) = S$$

En el cas de l'objecte de la figura 1, si fem un gir d'un dècim de volta respecte de l'eix normal al punt blanc del mig, l'objecte queda inalterat.

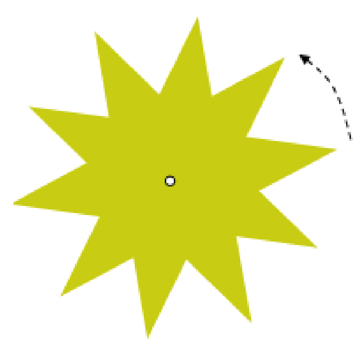


Fig. 1

Aquesta definició és molt intuitïva i cal afinar-la una mica més per poder-la aplicar a les situacions de la física. La paraula *objecte* sembla denotar les propietats geomètriques o, si més no, intrínseques del sistema físic. A més ... què és un sistema físic?

Sistema físic, estat i simetria

Per **sistema físic** s'enten habitualment la porció d'univers que volem estudiar. Posem-ne un exemple: una distribució esfèrica de càrrega negativa fixa a l'espai interacciona amb una piloteta carregada positivament. De resultes, la piloteta fa voltes el·líptiques a l'entorn de la distribució. A la figura 2 es pot veure una instantània: la piloteta en una posició i velocitat específiques rep la força. Com a resultat, la piloteta fa una trajectòria el·líptica. Si la piloteta partís d'una altra posició i/o velocitat, podria no tenir una trajectòria el·líptica. Podria ser circular, parabòlica, rectilínia... a més de poder-ho fer en plans diferents del que es representa a la figura.

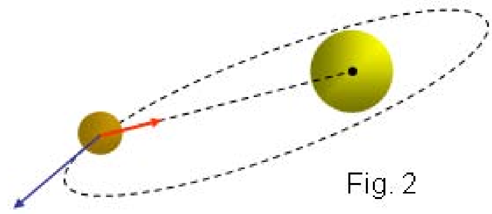


Fig. 2

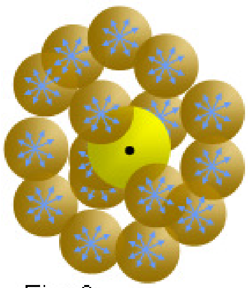


Fig. 3

Per sistema físic entendrem el conjunt de totes aquestes possibilitats. És a dir, no cal especificar la situació i la velocitat de la piloteta. El que és important és la força (com a funció de la posició i la velocitat de la piloteta), que, a través de la llei de moviment de Newton i conjuntament amb les condicions inicials, en determinarà el futur.

És com si consideréssim la distribució central i totes les possibles posicions i velocitats de la piloteta alhora, com hem representat a la figura 3. És molt millor pensar que el que tenim és només la distribució central i la piloteta ja l'hi posarem més tard... però no l'oblidem! Així, una bona representació del nostre sistema físic és el de la figura 4, en el benentès que caldrà posar la piloteta en un lloc específic, donar-li una empenta i deixar que la força faci la resta. Aquesta imatge és la que habitualment s'empra amb el concepte de camp (elèctric, gravitatori...), però no oblidem que un camp per si sol no és res. El sistema complet necessita alguna cosa més amb la qual pugui interactuar el camp. En el nostre cas, la piloteta.

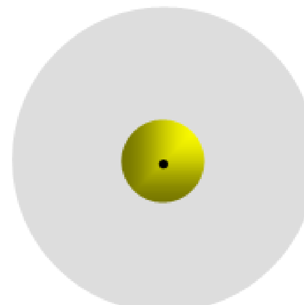


Fig. 4

Per **estat** d'un sistema físic entendrem afegir a la funció força (és a dir, al sistema) l'especificació de les posicions i les velocitats dels components del sistema. En el nostre cas, és donar una posició i una velocitat a la piloteta. El nostre sistema té simetria esfèrica: la distribució de càrrega és esfèrica. En canvi, els diferents estats no tenen aquesta simetria, encara que en poden tenir una de menor. Com veiem, podem parlar de **simetria d'un sistema** i de **simetria d'un estat** d'aquest sistema. El concepte de simetria d'un estat és menys abstracte que el de simetria d'un sistema. Els dos conceptes són igual d'importants i ens duen a bons resultats.

El nostre sistema (vegeu la figura 4) té simetria sota rotacions al voltant del punt central de la distribució. Aquesta simetria determina que la força sigui de tipus central. Les equacions de l'electrostàtica o del camp gravitatori ens permetrien afegir que és del tipus $1/r^2$; ara, això no és rellevant aquí. Les simetries poden dir altres coses. La força hereta la simetria de la distribució. En aquest cas, la força té simetria sota rotacions. Aquest fet té com a conseqüència, via teorema de Noether W, que hi ha una quantitat vectorial anomenada moment angular que es manté constant mentre el sistema evoluciona a partir d'un estat inicial qualsevol. Això vol dir que la piloteta es mourà a partir d'un estat inicial, de manera que unes certes relacions entre posició i velocitat en cada instant seran numèricament invariants. Amb el teorema de Noether, i si el sistema té simetria per translació temporal, també es pot deduir que l'energia es conserva... Poca broma, amb l'Emmy W!

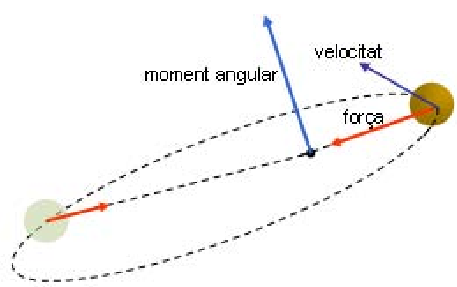


Fig. 5

Ara, si considerem un estat particular del sistema, no tindrà simetria sota rotacions al voltant del punt central de la força ni de cap altre punt (excepte si la massa es troba en repòs al centre de forces). Això no vol dir que no pugui tenir un tipus de simetria. Per exemple, a la figura 6 tenim un estat on la massa té una velocitat inicial que apunta cap al centre de la força. Clarament no té simetria, sota qualsevol rotació al voltant del punt central de la força. Sí que té simetria de rotació al voltant de l'eix que uneix la massa i el punt central de la força. Aquest fet ens pot servir per preveure que la massa seguirà una trajectòria per sobre de l'eix de simetria esmentat. La mateixa conclusió es podria extreure d'una manera més embolicada a partir de la conservació del moment angular.

Fig. 6

La conclusió de la conservació del moment angular ha necessitat tot un teorema per arribar-hi. No és ni trivial ni evident l'associació que hi ha entre les simetries d'un sistema i les quantitats conservades. Per contra, la simetria d'un estat particular del sistema (figura 6) ens serveix de manera immediata per preveure una part de les característiques de la trajectòria que seguirà el sistema. També la simetria del sistema (figura 4) ens permet arribar de manera immediata a la conclusió que la força ha de ser central. Pensem que aquestes dues últimes aplicacions de les simetries estan fàcilment a l'abast de l'estudiantat de secundària, cosa que no vol dir que es faci sense cap mena d'explicació, ni tampoc que tot sigui supersenzill.

Principi de simetria

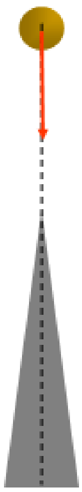


Fig.7

Pierre Curie va ser el primer a enunciar un principi de simetria, l'any 1894:

Un efecte no pot tenir una manca de simetria no present a la causa.

D'aquí podem deduir una versió una mica més pràctica:

Si les causes tenen unes simetries, llavors els efectes tenen com a mínim les mateixes simetries.

Fixem-nos que hem d'estar segurs que controlem **totes** les causes. Podria passar que una part de les causes fossin simètriques i de la resta no s'en digués res. Els efectes en aquest cas no tindrien perquè ser simètrics!

Aquest principi de simetria ens és útil per deduir, en el cas del sistema de la figura 4, que la força és central, perquè la causa de la força és una distribució que té simetria esfèrica. En canvi, la terminologia d'efecte-causa no ens queda tan clara, si l'apliquem a un estat concret del sistema. Recordem que el concepte d'estat és més restrictiu que el de sistema. És el sistema, juntament amb les posicions i la velocitat inicials dels components. Per això podem enunciar:

Si l'estat inicial té unes simetries llavors els estats futurs i passats tenen les mateixes simetries.

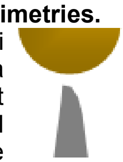


Fig. 8

Això sembla la mar de lògic..., però, compte! Es pot trencar la simetria! Pot passar que el sistema tingui punts crítics. A la figura 7, la previsió que ens dóna l'aplicació del principi és que la piloteta es mourà sempre sobre l'eix de simetria i que, per tant, o bé es quedarà clavada o farà un o més bots. La realitat és que, òbviament, la piloteta passarà per la dreta o per l'esquerra. Així doncs, en aquests casos, el principi falla. El principi funciona per a sistemes sense punts crítics. En la pràctica, podem explicar que un sistema d'aquesta mena és només aparentment simètric, perquè, sense apel·lar al vent i a altres causes externes, si n'ampliem suficientment la punta, vegeu la figura 8, sempre acabarem observant que no és simètrica!

Principals simetries

Donem aquí una llista de referència ràpida de les simetries més importants en física. La majoria són simetries de caràcter geomètric. És curiós observar que algunes són realitzables, com ara que **realment** podem fer una rotació d'un objecte encara que sigui costós i pesat. En canvi per més que ens hi escarrassem NO podem fer realment una reflexió de cap objecte. Certament, el podem col·locar davant d'un mirall..., però recordem que el que hi ha realment "darrere" del mirall de paret és, com a molt, el nostre veí o veïna!. És molt notable que una operació no realitzable sigui un dels arguments més convincents i que aporti tants bons resultats en física i en altres àmbits de les ciències. Tot i això, hoveurem més endavant, aquesta simetria dóna més guerra del que en principi es ppt esperar.
Tampoc podem realment invertir el sentit del temps, encara que ara qualsevol pugui passar una pel·lícula enrere sense problemes.... Però només és una pel·licula. La no-realitat de la inversió temporal ja ens sembla més evident, forma part d'un dels grans somnis de la humanitat!

Homogeneïtat i isotropia : el sistema no canvia per translació en qualsevol direcció i rotacions respecte de qualsevol punt.

Simetria plana: el sistema no canvia per translacions sobre un pla.

Simetria especular: el sistema no canvia per reflexió respecte d'un pla.

Simetria esfèrica:el sistema no canvia per rotacions al voltant d'un punt.

Simetria cilíndrica: el sistema no canvia per rotació al voltant d'un eix i translació al llarg d'aquest eix

Simetria axial: el sistema no canvia per rotació al voltant d'un eix.

Simetria temporal: el sistema no canvia per translacio temporal, és a dir, en deixar passar el temps.

Simetria per inversió temporal: el sistema no canvia en invertir el temps temps, això és: el que s'esdevé en "passar la pel·licula al revés" és fisicament compatible amb el sistema, són estats posibles del sistema.

Simetria de velocitat: el sistema no canvia si tot el sistema es mou a una velocitat constant. Aquesta és una simetria que es pot realitzar fàcilment en comprovar que el comportament dels objectes físics, quan els observem a dins d'un vagó de tren de vies llises que es mou a una velocitat constant, és el mateix que si el vagó estigués aturat. Cal dir que la manera d'implementar aquesta simetria ens du a la mecànica no relativista (transformacions de Galileu) o a la relativista (transformacions de Lorentz). Però això és tota una altra història.

Alguns problemes que es poden resoldre per simetria

1) **Sistema:** absència de força.
Estat: partícula amb velocitat (figura 9).
Si una partícula no està sotmesa a cap força i en un cert instant té una certa velocitat, la partícula es mourà en la direcció que marca la velocitat. Això és conseqüència de la simetria axial que presenta l'estat inicial. No podem arribar a dir (per simetria) que la partícula no canviarà el mòdul de la velocitat. Això és conseqüència de la llei de moviment de Newton

$\vec{F} = m\vec{a}$.

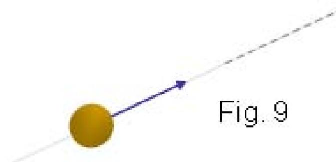


Fig. 9

2) **Sistema:** força uniforme: el vector força val el mateix en qualsevol punt de l'espai .
Estat: partícula amb velocitat en la mateixa direcció que la força (figura 10).
Si una partícula està sotmesa a una força uniforme i en un cert instant té una certa velocitat en la mateixa direcció que la força, es mourà en la direcció que marca la força i la velocitat. Això és conseqüència de la simetria axial que presenta l'estat inicial.

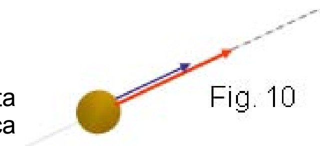


Fig. 10

3) **Sistema:** força uniforme: el vector força val el mateix en qualsevol punt de l'espai.
Estat: partícula amb velocitat no alineada amb la força (figura 11).
Si una partícula està sotmesa a una força uniforme i en un cert instant té una velocitat no alineada amb la força, es mourà sempre dins el pla format per la força i la velocitat inicial. Això és conseqüència de la simetria per reflexió que presenta l'estat inicial.

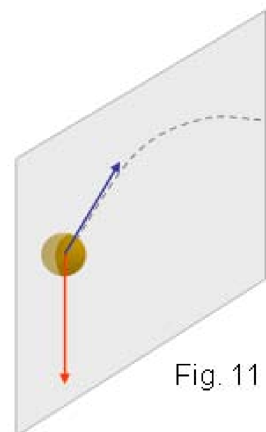


Fig. 11

4) **Sistema:** distribució esfèrica de càrrega o masssa (figura 12).

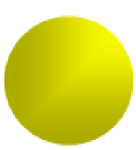


Fig. 12

Una distribució de càrrega o massa és la causa d'un camp (gravitatori o elèctric). El camp tindrà, com a mínim, la mateixa simetria que la causa. Per tant, tindrà simetria esfèrica. L'única opció és que sigui com el de la figura 13, entrant o sortint.

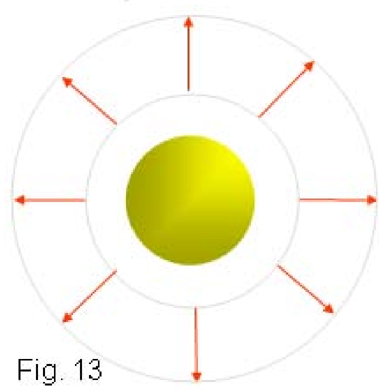


Fig. 13

5) **Sistema:** distribució rectilínia de càrrega o massa (figura 14).

El camp tindrà, com a mínim, la mateixa simetria que la causa. Per tant, tindrà simetria cilíndrica i simetria especular respecte de qualsevol pla normal a la distribució. L'única opció és que sigui com el de la figura 15, entrant o sortint.


Fig. 14

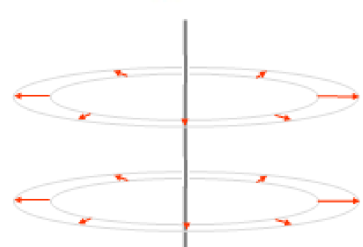
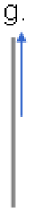


Fig. 15

6) **Sistema:** corrent elèctric rectilini (figura 16).



Un corrent elèctric és la causa d'un camp magnètic. El camp tindrà, com a mínim, la mateixa simetria que la causa. Si observem la figura 16, veiem que hi tenim simetria cilíndrica, però no simetria especular respecte de qualsevol pla normal a la distribució, al contrari que en el cas anterior. Així doncs, el camp magnètic no té per què ser com l'elèctric o el gravitatori del cas anterior, encara que, per arguments de simetria, seria una opció compatible! Així, els arguments de simetria no són suficients per concloure el patró de la figura 18. Tenim moltes altres opcions igual de bones, com l'exemple de la figura 17. En aquesta figura, apostant per la claredat del dibuix, només hem dibuixat una línia de camp. De fet, cal tenir present que per a tot punt de l'espai passaria una línia de camp com la de la figura. Així queda clar que presenta simetria cilíndrica.

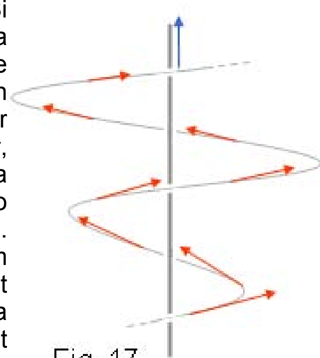


Fig. 17

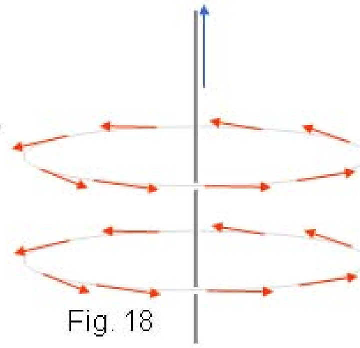


Fig. 18

Fig. 19

7) **Sistema:** distribucio homogènia plana indefinida de càrrega o massa (figura 19)

El camp tindrà, com a mínim, la mateixa simetria que la causa. Per tant, tindrà simetria plana i per reflexió respecte del pla de la distribució. L'única opció és que sigui com el de la figura 20, entrant o sortint. El camp és constant i té un mòdul igual i de sentit contrari per a cada parella de plans simètrica respecte de la distribució. El valor que prengui en cada parella d'aquests plans pot canviar, és clar.

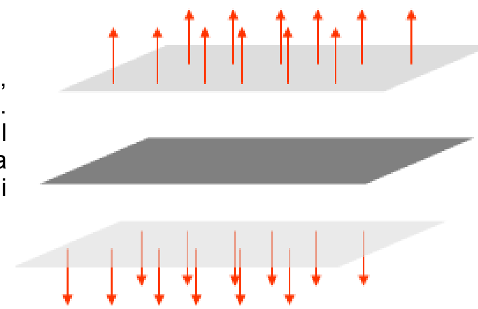


Fig. 20

8) Quant val el camp (elèctric o gravitatori) en el punt mitjà de la línia d'unió de dues partícules idèntiques (figura 21)?

Fig. 21

Tenim simetria axial i simetria per reflexió respecte del pla normal en el punt mitjà. L'única possibilitat és que el camp sigui nul. Notem que si ens oblidem de la simetria axial i només tenim en compte l'equidistància, hi haurien més possibilitats, si no és que apel·lem a altres arguments propis dels camps en qüestió!

10) Quant val el camp (elèctric o gravitatori) en el punt mitjà d'un triangle equilàter format per tres partícules idèntiques (figura 22)?

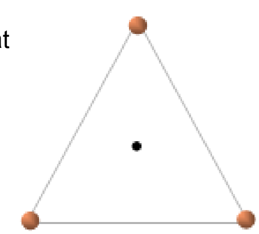


Fig. 22

Tenim simetria per reflexió respecte del pla del triangle i simetria per rotació d'un terç de volta respecte de l'eix normal en el triangle que passa pel punt mitjà. L'única possibilitat és que el camp sigui nul.

Notem que si ens oblidem de la simetria respecte del pla i només tenim en compte l'equidistància, hi haurien més possibilitats, si no és que apel·lem a altres arguments propis dels camps en qüestió! Per exemple, la força podria ser entrant per a càrregues positives i sortint per a càrregues negatives. Una força així no compliria el principi de simetria!

L'estrany cas del camp magnètic

8) Un camp magnètic uniforme (el vector camp magnètic en tot punt de l'espai val el mateix), representat en vermell a la figura 23, actua sobre una partícula carregada, que, en l'instant inicial, té una velocitat normal al camp, representada en blau a la mateixa figura.

Fixem-nos que si hi representem la força, normal al camp i a la velocitat (en violeta i tangent al pla a la figura 24), tenim tot el sistema definit i estem en un cas semblant (no igual) al **3**. L'estat presenta simetria per reflexió respecte del pla força-velocitat. El sistema té la mateixa simetria i podem concloure que el moviment de la partícula estarà contingut en el mateix pla.

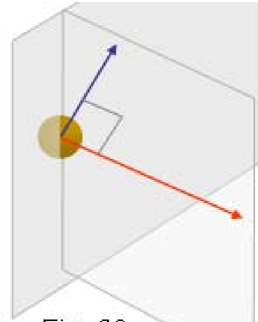


Fig. 23

En canvi, si, en lloc de la força, hi representem el camp magnètic, no tenim, *aparentment*, la simetria anterior (vegeu les figures 23 i 25). Tenim una aparent contradicció o les coses no són tan senzilles com semblen...

Qui ha dit que els vectors (tots) canvien de sentit per reflexió? Potser el que passa és que anem dibuixant coses que cada cop són més "fantasmes" i els atribuïm un comportament *com si fossin objectes visuals* que no tenen per què tenir! Posició, velocitat, acceleració i, si ens apurem, força, en definitiva $\vec{F} = m\vec{a}$, són conceptes molt lligats a la geometria dels objectes visuals. El camp elèctric, $\vec{F} = q\vec{E}$, també el podem encabir en aquesta família...; però el camp magnètic ja no és tan senzill. El camp magnètic, com tots els altres, es comporta com es pot preveure sota rotacions i translacions. Per això el que direm ara no invàlida, sortosament, les conclusions fetes a **6**!

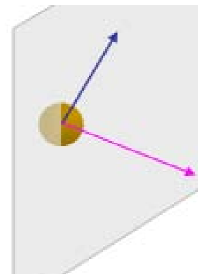


Fig. 24

El vector posició i els seus derivats (velocitat, acceleració, força i tots els que es construeixen a partir del vector posició per derivació, producte per un escalar i suma vectorial) es comporten com "es pot esperar" sota reflexions. Diem que són **vectros purs.**

A més tenim els **vectors axials**, que es produeixen fent el producte vectorial de dos vectors purs. El seu comportament es dedueix del que passa als ingredients.

A la figura 26 el vector $\vec{C}$ és el producte de dos vectors purs $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

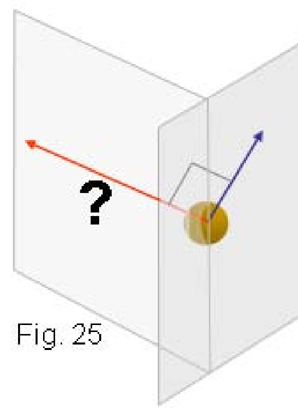


Fig. 25

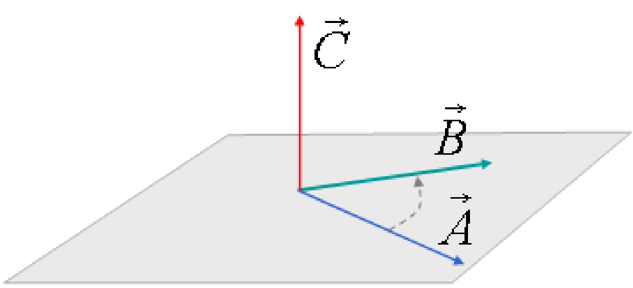


Fig. 26

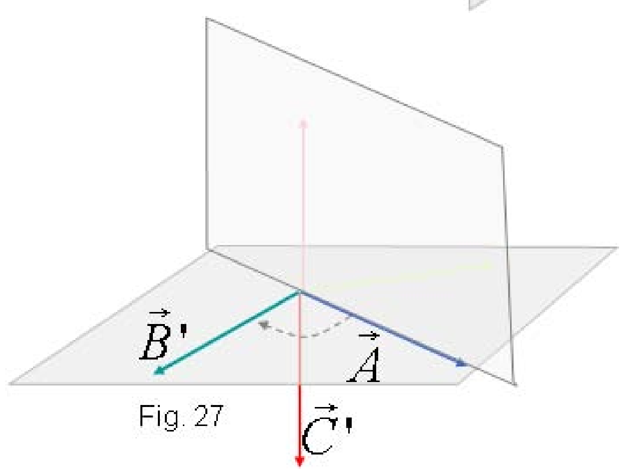


Fig. 27

Fem una transformació de reflexió respecte d'un pla definit per $\vec{A}$ i $\vec{C}$ (vegeu la figura 27). El vector pur $\vec{B}$ passa a ser $\vec{B}\,'$. Realitzem el nou producte vectorial i $\vec{C}$ passa a ser $\vec{C}\,'$!

Notem que si, aplicant el mateix criteri, fem una reflexió respecte del pla definit per $\vec{A}$ i $\vec{B}$, *curiosament* $\vec{C}$ resta inalterat!!

Així és clar que si el camp magnètic és un vector axial el sistema i l'estat representats a la figura 23 són simètrics respecte de les reflexions del pla normal al camp magnètic i la conclusió és la mateixa que hem tret quan hem treballat directament amb la força.

Aquest comportament no és exclusiu del magnetisme, encara que ajuda a fer-lo encara més misteriós. També són vectors axials, entre els més coneguts: el moment angular, el moment d'una força, qualsevol vector de superfície, etc.

Una qüestió pot quedar penjada. Si el camp magnètic és un vector axial, com és que la força corresponent (de Lorentz) no ho és? La resposta és que la força de Lorentz està formada per un producte vectorial d'un vector axial i un de pur. És a dir, en total dos productes vectorials a partir de vectors purs. El resultat és que la força és un vector pur. En general, si un vector està format per un nombre parell de productes vectorials a partir de vectors purs llavors també és pur. Si el nombre de productes vectorials és imparell, llavors és un vector axial.

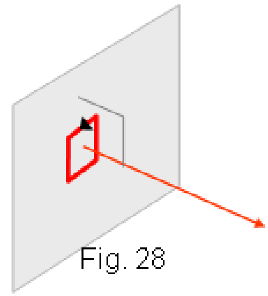


Fig. 28

Hem de dir que tot aquest merder s'arregla quan s'utilitzen matemàtiques més sofisticades (de fet, *més properes a la realitat*!), que, com a mínim per a la resta de segle XXI, queden fora del nivell de l'estudiantat. El que sí que podem dir és que, en aquestes matemàtiques, el camp magnètic no es representa com un vector, sinó com un circuit o una superfície orientada. A la figura 28, hi tenim la representació del camp magnètic vectorial i tensorial (així és com tècnicament se'n diu, del petit circuit), a la vegada. Notem que la representació tensorial (el petit circuit) es comporta bé sota reflexions!
Per acabar-nos de convèncer, a la figura 29 tenim, a l'esquerra, un model d'imant amb el pol nord i el pol sud pintats de i , respectivament. Els corrents interns que provoquen el camp magnètic sortint del pol nord estan representats a la figura com una bobina de corrent. Ara fem una rotació de 180o respecte d'un eix contingut en el pla que divideix l'imant en dos. El comportament és el que es pot esperar. Fem una reflexió respecte del mateix pla. Notem que els corrents tenen el mateix sentit! Així, encara que les etiquetes i s'han reflectit, el camp magnètic continua tenint el mateix sentit. Ara el pol nord està representat per l'etiqueta i el sud a l'etiqueta !

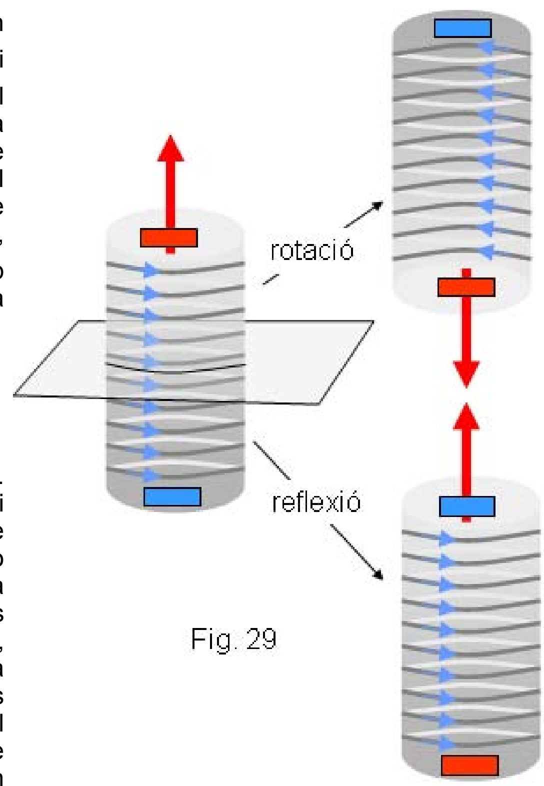


Fig. 29

Conclusions?

Bé, hem fet quatre pinzellades a l'entorn del concepte de simetria. Com no es podia esperar, les coses no resulten tan senzilles. Tot i això, creiem que són abastables. Pensem que el concepte de simetria està tan ficat dins el cervell, que s'utilitza encara que no ho vulguem. El problema ve quan no se n'ha explicitat una terminologia o no se n'han explorat correctament les conseqüències. Si diem que el sistema solar té simetria esfèrica, volem dir que el Sol, causant de la força o camp que interactuarà amb els planetes, i menyspreant les forces que es fan els planetes entre ells, té simetria esfèrica respecte del seu centre. No que el Sol amb els planetes tal qual tinguin simetria esfèrica! Si diem que el camp magnètic és simplement un vector, tard o d'hora estarem provocant que més d'un estudiant entri en profundes contradiccions. .

No tenim unes conclusions clares sobre aquest assumpte. Els conceptes senzills s'han d'explicar. I si es compliquen una mica, encara és més necessari explicar-los, perquè si no la seva aparent senzillesa ens fa dir a tots coses que no són certes i que provoquen profundes contradiccions. On és el punt mitjà de tot plegat? Mirem de trobar-lo entre tots. Aquí, simplement, hem volgut obrir el debat.

Xavier Jaén

Professor de física a l'ETSEIB de la Universitat
Politècnica de Catalunya(UPC).
Adreça electrònica: Xavier.Jaen@upc.edu
Pàgina web: http://baldufa.upc.es/xjaen